Algebra III - Abstraktna algebra, 30.08.2016.

1. Naj bo G ciklična grupa generirana z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(30%)(a) Kateri so preostali elementi grupe G? Svojo trditev obrazložite.

(30%)(b) Zapiši Cayley-evo tabelo za grupo G.

(10%)(c) Ali je G abelska grupa?

(30%)(c) Napišite vse generatorje grupe G.

Re.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
$A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$

(b)

	I	A	A^2	A^3	A^4	A^5
I	I	A	A^2	A^3	A^4	A^5
A	A	A^2	A^3	A^4	A^5	I
A^2	A^2	A^3	A^4	A^5	I	A
A^3	A^3	A^4	A^5	I	A	A^2
A^4	A^4	A^5	I	A	A^2	A^3
A^5	A^5	I	A	A^2	A^3	A^4

(c) Da.

(d) $G = \langle A \rangle$, $G = \langle A^5 \rangle$.

2. Naj bo $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ in $H = \mathbb{Z}_6$. Ali je $G \cong H$? Odgovor utemeljite!

Re.

$G = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$

	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$
$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$

$H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

	0	2	4	3	5	1
0	0	2	4	3	5	1
2	2	4	0	5	1	3
4	4	0	2	1	3	5
3	3	5	1	0	2	4
5	5	1	3	2	4	0
1	1	3	5	4	0	2

Da, $G \cong H$, $\varphi : G \longrightarrow H$ je izomorfizem, kje $\varphi(0,0) = 0$, $\varphi(0,1) = 2$, $\varphi(0,2) = 4$, $\varphi(1,0) = 3$, $\varphi(1,1) = 5$ in $\varphi(1,2) = 1$...

3. Naj bo S_4 simetrična grupa reda 4!.

(40%)(a) Določite podgrupo grupe S_4, ki vsebuje 6 elementov.

(10%)(b) Koliko podgrup reda 6 obstaja v grupi S_4?

(50%)(c) Če je $H = \langle(12), (13)\rangle$, določite vse leve odseke podgrupe H v grupi S_4.

Re.

(a) $S_3 \leq S_4$, $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

(b) Obstajajo 4 grupe reda 6.

(c) $H = S_3$. Levi odseki so: $(1)H$, $(14)H$, $(24)H$, $(34)H$.

4. (50%)(a) Naj bo D_6 diederska grupa reda 6. Grupa D_6 deluje na množici $X = \{A, B, C\}$ ogljišč enakostraničnega trikotnika $\triangle ABC$. Določite orbito in stabilizator vsakega elementa iz množice X glede na delovanje grupe D_6.

(50%)(b) Množica $G = \{I, A, B, AB, BA, ABA\}$ tvori grupo glede na operacijo množenja, in njena Cayley-eva tabela je podana na desni strani.

Določite vse Sylowe 2-podgrupe grupe G ter vse Sylowe 3-podgrupe grupe G.

	I	A	B	AB	BA	ABA
I	I	A	B	AB	BA	ABA
A	A	I	AB	B	ABA	BA
B	B	BA	I	ABA	A	AB
AB	AB	ABA	A	BA	I	B
BA	BA	B	ABA	I	AB	A
ABA	ABA	AB	BA	A	B	I

Re.

(a) $G = D_3 = \{id, \rho, \rho^2, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2\}$, $GA = \{A, B, C\} = X$, $G_A = \{id, \sigma\}$, $G_B = \{id, \sigma\rho\}$, $G_C = \{id, \sigma\rho^2\}$.

(b) Sylowe 2-podgrupe grupe G so $\{I, A\}$, $\{I, B\}$, $\{I, ABA\}$. Sylowe 3-podgrupe grupe G so $\{I, AB, BA\}$.